

Ein Klimamodell im Mathematikunterricht

Günther Karigl, TU Wien

In diesem Aufsatz wird der Versuch unternommen, ein mathematisches Modell zur Beschreibung globaler Klimaänderungen auf unserer Erde für die Behandlung im Schulunterricht aufzubereiten. Dabei werden sowohl die Modellbildung wie das Modellverhalten ausführlich diskutiert. Die gewählte Thematik eröffnet Querverbindungen von der Mathematik zur Physik, in den Umweltbereich und zur Informatik. Als Ergänzung zu dieser Darstellung ist eine Programmdiskette mit Computerprogrammen zu den besprochenen Modellvarianten vom Autor erhältlich.

1. Einleitung

Klima beschreibt den mittleren, langfristig veränderlichen Zustand der Atmosphäre an der Erdoberfläche. Im Gegensatz zum kurzfristigen Wettergeschehen, das sich in einem Zeitraum von Stunden oder Tagen abspielt, liegt der Zeithorizont beim Klima im Bereich von Jahren und Jahrzehnten. Das Klima ist eine Folge externer Einflüsse, vor allem der Sonneneinstrahlung, auf unsere Erde sowie physikalischer Vorgänge in der Atmosphäre. Der Verlauf dieser Prozesse wird durch Klimafaktoren wie geographische Breite, Verteilung von Festland und Meer, Meeresströmungen, Vegetation u. a. beeinflusst. Der Zustand des Klimasystems wird durch die Klimaelemente wiedergegeben, das sind z. B. Lufttemperatur, Luftdruck, Wind oder Niederschlag.

Seit den siebziger Jahren gibt es erste Ansätze, unser Klimasystem durch mehr oder weniger aufwendige mathematische Modelle, sogenannte Klimamodelle, quantitativ zu beschreiben (siehe Bayer (1991) für eine Übersicht). Die Aufgabe eines Klimamodells ist es, unter Berücksichtigung möglichst vieler verfügbarer Informationen über externe Einflüsse und interne Wechselwirkungen die zeitliche Entwicklung der Klimagrößen, wenigstens jedoch der bodennahen Lufttemperatur, anzugeben bzw. vorherzusagen. Von diesem Ziel ist die Wissenschaft heute allerdings noch weit entfernt.

Im folgenden sollen unter stark einschränkenden Annahmen drei einfache Klimamodelle vorgestellt werden, welche in der Lage sind, einen dem heutigen Klimasystem entsprechenden Klimazustand wiederzugeben. Einzige Zustandsgröße ist die Temperatur, deren zeitlicher Verlauf durch das Modell beschrieben werden soll. Ferner werden sowohl der horizontale als auch der vertikale Wärmefluß vernachlässigt, sodaß sich reine Zeitmodelle ergeben. Im ersten

Ansatz wird ein Grundmodell beschrieben, welches einen langfristig stationären, gegenüber lokalen Temperaturschwankungen sowie möglichen Änderungen der Sonneneinstrahlung stabilen Klimazustand ermöglicht. Im darauffolgenden Modell wird eine Rückkoppelung zwischen der Wärmeeinstrahlung und der aktuellen Temperatur berücksichtigt, welche zu einem gänzlich unterschiedlichem Stabilitätsverhalten der stationären Klimazustände führt. Schließlich kann durch einen Ansatz mit temperaturabhängiger Wärmeausstrahlung ein Treibhauseffekt in das Klimamodell einbezogen werden, der im letzten Modell untersucht wird.

Durch die vorliegende Auswahl sind sowohl zur Modellbildung als auch zum Verständnis des Modellverhaltens nur relativ einfache mathematische Methoden erforderlich. Dort, wo quantitative Lösungsmethoden fehlen oder im Schulunterricht nicht zur Verfügung stehen, führen - wie häufig in der angewandten Mathematik - qualitative Überlegungen und Simulationen zur Einsicht in die Dynamik der betrachteten Systeme. Durch den unmittelbaren Anwendungsbezug und seine Nähe zum Bereich Umwelt und zur Informatik erscheint das gewählte Thema für Projekte, das vertiefende Wahlfach, Fachbereichsarbeiten oder für die fächerübergreifende Matura in der AHS besonders geeignet.

2. Ein Referenzmodell

Ausgangspunkt für die mathematische Modellbildung ist eine globale Energiebilanz, derzufolge sich die Änderung der im Klimasystem gespeicherten Wärmemenge als Differenz von Wärmeeinstrahlung und Wärmeausstrahlung darstellen lässt. Betrachten wir als zentrale Klimagröße die bodennahe Lufttemperatur T in Abhängigkeit von der Zeit t , so gilt

$$(1) \quad c \cdot dT/dt = R_{\text{ein}}(T) - R_{\text{aus}}(T),$$

wobei sämtliche Größen über alle geographischen Längen und Breiten räumlich sowie langfristig zeitlich gemittelt anzusehen sind. Die linke Seite von Gleichung (1) beschreibt die Wärmespeicherung und $R_{\text{ein}}(T)$ bzw. $R_{\text{aus}}(T)$ bezeichnen die i.a. von der Temperatur T abhängige Sonneneinstrahlung bzw. in den Weltraum abgegebene Wärmeausstrahlung, jeweils pro Flächen- und Zeiteinheit (in W/m^2).

Der Speicherterm $c \cdot dT/dt$ bestimmt das zeitabhängige Verhalten des Systems (1) und ist proportional zur zeitlichen Temperaturänderung dT/dt . Stellen wir uns die Erde vereinfacht als gleichmäßig von Wasser bedeckten Planeten vor, erhalten wir für den Proportionalitätsfaktor

$$c = \rho_{\text{H}_2\text{O}} \cdot c_{\text{H}_2\text{O}} \cdot h \cdot \alpha_{\text{H}_2\text{O}},$$

wo $\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 10^3 \text{ kg}/\text{m}^3$ die Dichte und $c_{\text{H}_2\text{O}} = 4,19 \cdot 10^3 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ die spezifische Wärme von Wasser bezeichnen. Mit einer durchschnittlichen Meerestiefe von $h = 30 \text{ m}$ bis 40 m und einem Anteil des Meeres an der gesamten Erdoberfläche von etwa $\alpha_{\text{H}_2\text{O}} = 70\%$ kommt Fraedrich (1979) für c auf einen Wert in der Größenordnung von $c = 10^8 \text{ J}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$.

Die Sonneneinstrahlung R_{ein} hängt zunächst vom Strahlungsangebot am Rand der Atmosphäre ab. Der Energiebetrag, den die Erde an der Obergrenze der Atmosphäre von der Sonne pro Flächen- und Zeiteinheit zugestrahlt bekommt, ist durch die Solarkonstante I gegeben und beträgt etwa 1360 W/m^2 . Von der Sonne aus gesehen erweckt die Erde optisch den Eindruck einer Kreisscheibe, die einseitig bestrahlt wird. Da die Kugeloberfläche jedoch viermal größer als die der Strahlung ausgesetzte Querschnittsfläche ist, beträgt das Strahlungsangebot im Tagesmittel lediglich $I/4 = 340 \text{ W/m}^2$. Schließlich muß berücksichtigt werden, daß ein guter Teil der einstrahlenden Energie wieder in den Weltraum zurückreflektiert wird. Das Verhältnis der reflektierten zur einfallenden Energie wird durch die planetare Albedo α bestimmt und beträgt für die Erde im Durchschnitt etwa 30% bei großen Unterschieden in Abhängigkeit von Bodenbeschaffenheit, Bewölkung und Temperatur (siehe Tab. 1). Demnach gilt für die Wärmeeinstrahlung insgesamt

$$(2) \quad R_{\text{ein}} = (1/4) I (1 - \alpha) = 340 \mu (1 - \alpha).$$

Der Parameter μ in Gleichung (2) soll die Untersuchung von Schwankungen der Solar-konstanten ermöglichen. Wenn nicht anders angegeben wird $\mu = 1$ gesetzt.

Tabelle 1. Planetare Albedo, d.i. der Anteil der reflektierten zur einfallenden Strahlungsenergie, in Abhängigkeit von der Bodenbeschaffenheit

Körper	Albedo α
Ozean	39% (2% - 70%)
Wolken	70% - 90%
Schnee	50% - 90%
Wiesen	2% - 5%
Wald	4% - 10%
Mond	7%
Venus	76%
Mars	15%

Die von der Erde abgegebene Wärmestrahlung ist nach dem Stefan-Boltzmann'schen Gesetz proportional zur vierten Potenz ihrer Oberflächentemperatur, d.h.

$$(3) \quad R_{\text{aus}} = \sigma \varepsilon T^4.$$

Dabei ist der Proportionalitätsfaktor durch die Stefan-Boltzmann-Konstante $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/(m}^2\text{K}^4)$ gegeben und Abweichungen vom idealen schwarzen Körper werden durch einen zusätzlichen Faktor, die Emissionsfähigkeit ε , berücksichtigt. Dieser beträgt für schwarze Körper $\varepsilon = 1$, für die Erde gilt vor allem durch den Einfluß der Bewölkung $\varepsilon < 1$.

Setzen wir nun (2) und (3) in Gleichung (1) ein, so resultiert als Modellgleichung unseres Klimamodells

$$(4) \quad c \cdot dT/dt = R_{\text{ein}} - R_{\text{aus}} = 340 \mu (1 - \alpha) - 5,67 \cdot 10^{-8} \varepsilon T^4.$$

Damit haben wir eine Differentialgleichung für die Erdoberflächentemperatur $T(t)$ als Funktion der Zeit t erhalten, welche die Temperaturänderung dT/dt in Abhängigkeit von der Temperatur T und den Parametern μ , α und ε beschreibt. Gleichung (4) bildet den Ausgangspunkt für alle Klimamodelle in dieser Darstellung und ermöglicht eine qualitative Untersuchung des Temperaturverhaltens, wobei wir uns auf das Aufsuchen von möglichen stationären Klimazuständen sowie auf deren Stabilitätsverhalten konzentrieren werden.

Als Referenzmodell wählen wir nun mit Fraedrich (1979) für die planetare Albedo den Wert $\alpha = 28,4\%$ und für die Emissionsfähigkeit der Erde $\varepsilon = 0,62$. Die relative Sonneneinstrahlung werde zunächst auf den Standardwert $\mu = 1$ gesetzt. Damit folgt $R_{\text{ein}} = 243$, $R_{\text{aus}} = 3,5 \cdot 10^{-8} T^4$ und die Modellgleichung des Referenzmodells lautet

$$(Modell A) \quad c \cdot dT/dt = p + r T^4,$$

wobei $p = 243$ und $r = -3,5 \cdot 10^{-8}$ ist.

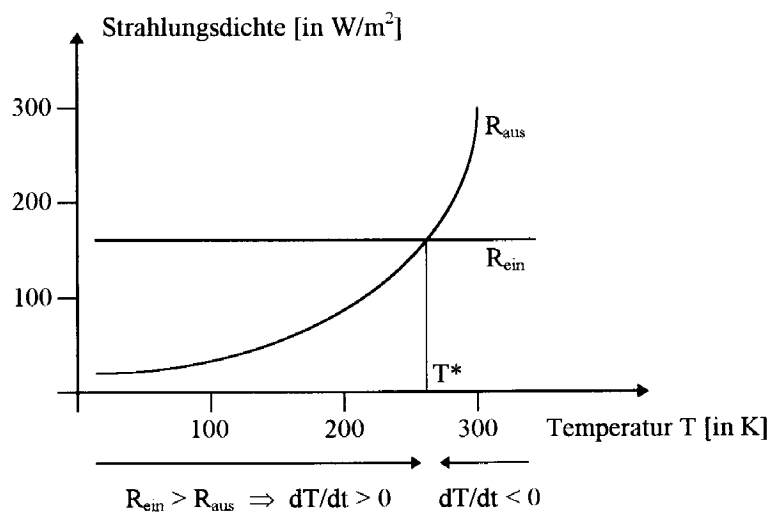


Abbildung 1. Stabilitätsverhalten des Referenzmodells A

Wir ermitteln zunächst die stationären Klimazustände, d.h. die konstanten Lösungen $T = T^*$ von Gleichung (A). Dazu setzen wir $dT/dt = p + rT^4 = 0$ und erhalten als Gleichgewichtstemperatur $T^* = \sqrt[4]{-p/r} = 288,7 \text{ K}$, also etwa 16 °C . Ferner kann aus Gleichung (A) auch das Stabilitätsverhalten des Gleichgewichtszustandes T^* ermittelt werden: Gilt $T < T^*$, so folgt (wegen $c > 0$) $dT/dt > 0$ und T ist monoton wachsend, wohingegen für $T > T^*$ die Temperatur T monoton fallend ist. Somit führen Temperaturschwankungen aus der Gleichgewichtslage stets wieder zu T^* zurück, T^* ist asymptotisch stabil. Dieses Stabilitätsverhalten kann auch aus Abb. 1 abgelesen werden.

Wir untersuchen nun die Abhängigkeit des Klimamodells (A) von der relativen Sonneneinstrahlung μ , d.h. wir fragen, wie sich Schwankungen in der Sonneneinstrahlung auf die Gleichgewichtstemperatur T^* auswirken können. Anstelle von Gleichung (A) tritt in diesem Fall

$$\text{(Modell A')} \quad c \cdot dT/dt = p(\mu) + r T^4$$

mit $p(\mu) = 243\mu$ und r wie oben. Die Gleichgewichtstemperatur beträgt dann allgemein $T^*(\mu) = 288,7\mu^{1/4}$ K und ist ebenfalls asymptotisch stabil (vgl. Abb. 2). Somit hat zwar eine Änderung des Parameters μ auch eine Verschiebung des Temperaturgleichgewichts zur Folge, die Stabilität dieses Gleichgewichts bleibt jedoch erhalten. Zu der inneren Stabilität des Modells gegenüber lokalen Temperaturschwankungen tritt eine strukturelle Stabilität des Klimamodells in Bezug auf die Sonneneinstrahlung.

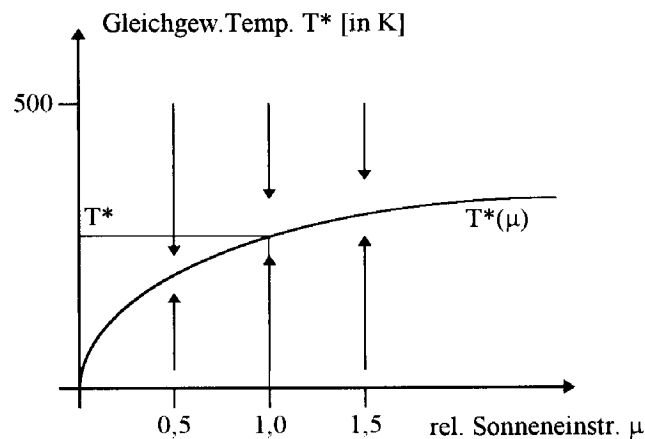


Abbildung 2. Strukturelle Stabilität des Referenzmodells A bei unterschiedlicher Sonneneinstrahlung

3. Albedo - Temperatur - Rückkoppelung

Im folgenden Modell soll die planetare Albedo nicht mehr als konstant angesetzt, sondern ihre Abhängigkeit von der Temperatur berücksichtigt werden. Schnee- und eisbedeckte Oberflächen weisen beispielsweise ein wesentlich höheres Rückstrahlungsvermögen auf als Flüssigwasseroberflächen. Fraedrich (1978) geht in seinem Klimamodell von einer linearen Albedo-Temperatur-Relation der Form $\alpha(T) = a - bT$ nach Budyko (1969) und Sellers (1969) aus, wobei die Albedo bei tiefen Temperaturen ihre obere Schranke von $\alpha = 0,75$ annimmt (vgl. Abb. 3):

$$(5) \quad \alpha(T) = \begin{cases} 0,75 & T < T_1 \\ 2,8 - 0,009T & \text{für } T_1 \leq T \leq T_2 \\ 0 & T > T_2 \end{cases}$$

mit $T_1 = 227,8$ K und $T_2 = 311$ K. Weitere Ansätze mit ähnlichem qualitativen Verlauf sind z.B. durch $\alpha(T) = 1,12 - 10^{-5}T^2$ nach Fraedrich (1979) oder $\alpha(T) = 0,42 - 0,2 \tanh(0,052(T - 276,15))$ nach Griffel und Drazin (1981) gegeben.

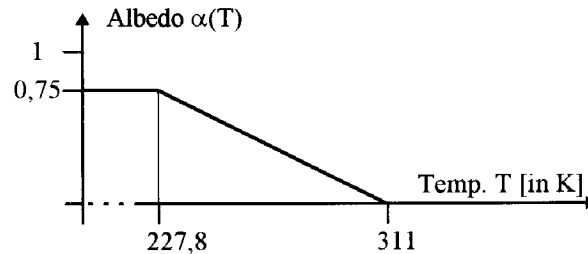


Abbildung 3. Lineare Albedo-Temperatur-Relation

Schreiben wir wieder $R_{\text{cin}}(T) = 340\mu(1 - \alpha(T))$ für die Wärmeeinstrahlung und $R_{\text{aus}}(T) = 5,67 \cdot 10^{-8} \varepsilon T^4$ für die Wärmeausstrahlung, wobei nach Fraedrich (1978) nun $\alpha(T)$ gemäß (5) und $\varepsilon = 0,69$ gewählt werde, dann folgt aus (4) die neue Modellgleichung

$$\text{(Modell B)} \quad c \cdot \frac{dT}{dt} = \begin{cases} p_1 + rT^4 & T < T_1 \\ p_2 + q_2 T + rT^4 & \text{für } T_1 \leq T \leq T_2 \\ p_3 + rT^4 & T > T_2 \end{cases}$$

mit $p_1 = 85\mu$, $p_2 = -612\mu$, $q_2 = 3,06\mu$, $p_3 = 340\mu$ und $r = -3,91 \cdot 10^{-8}$.

Im Gegensatz zu Modell A treten diesmal für $\mu = 1$ drei stationäre Klimazustände auf: Aus $p_1 + rT^4 = 0$ folgt $T_1^* = 215,9$ K (ungefähr -57 °C) und die Gleichung $p_2 + q_2 T + rT^4 = 0$ besitzt die beiden reellen Lösungen $T_2^* = 249,6$ K (etwa -23 °C) und $T_3^* = 288,3$ K (etwa 16 °C) (welche am zweckmäßigsten mit Hilfe des Newton'schen Näherungsverfahrens bestimmt werden). Für $T > T_2$ gilt stets $dT/dt < 0$, sodaß hier kein weiterer Gleichgewichtspunkt möglich ist.

Das Stabilitätsverhalten dieser drei Gleichgewichtslagen kann aus Abb. 4 abgelesen werden. Während die Temperaturen T_1^* und T_3^* beide asymptotisch stabil sind, also kleine Auslenkungen aus den stationären Zuständen mit der Zeit immer wieder ausgeglichen werden, ist T_2^* instabil, d.h., jede auch noch so geringe Auslenkung aus T_2^* wächst zu größeren Abweichungen an und führt entweder zu einem Temperaturanstieg auf den stationären Wert T_3^* oder zu einem Abfall auf T_1^* . Die dem heutigen Zustand unserer Erde entsprechende Gleichgewichtstemperatur liegt bei T_3^* . Mit denselben Modellparametern ist jedoch auch eine zweite Gleichgewichtstemperatur möglich, nämlich T_1^* . Diese würde sich - etwa infolge einer Klimakatastrophe - bei Durchschnittstemperaturen unter T_2^* einstellen und entspricht dem Zustand einer völlig vereisten Erdoberfläche.

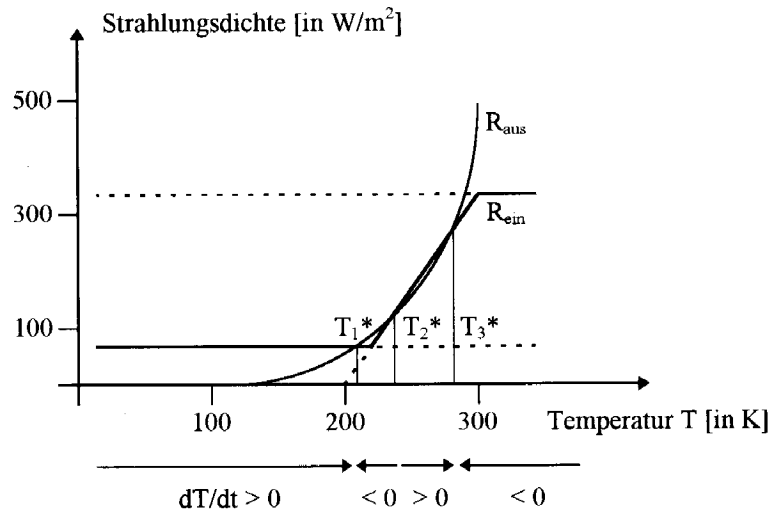


Abbildung 4. Stabilitätsverhalten des Modells B mit Albedo-Temperatur-Rückkoppelung

Gehen wir nun der Frage der Existenz und Stabilität von Gleichgewichtslagen in Abhängigkeit von der relativen Sonneneinstrahlung μ nach, so ergibt sich folgendes Bild (vgl. Abb. 5): Für Werte um $\mu = 1$ sind, wie oben, stets drei verschiedene Gleichgewichtstemperaturen T_1^* , T_2^* und T_3^* möglich, wobei der instabile Zustand T_2^* die Einzugsbereiche der beiden anderen stabilen Temperaturzustände trennt. Bei hoher Sonneneinstrahlung existiert als einziger stationärer Klimazustand nur mehr T_3^* , bei rückläufiger Sonneneinstrahlung ($\mu < 0,97$, siehe Abb. 5) kommt es zu einer dramatischen Abkühlung und das System gelangt in den Einzugsbereich des stabilen stationären Vereisungszustandes T_1^* . Somit liegt ein Beispiel struktureller Instabilität vor. Die zugehörige Stabilitätsgrenze kann leicht gefunden werden: Setzt man nämlich in Gleichung (B), mittlere Zeile, $dT/dt = 0$ und bestimmt daraus explizit die Kurve der Temperatur-Gleichgewichtslagen in der Form $\mu = \mu(T)$, so liegt die Stabilitätsgrenze im Bifurkationspunkt T_{23}^* dieser Kurve (vgl. Abb. 5), d.i. der einzige Punkt mit $d\mu/dT = 0$. Damit ergibt sich $T_{23}^* = 266,7 \text{ K}$ und $\mu = 0,97$.

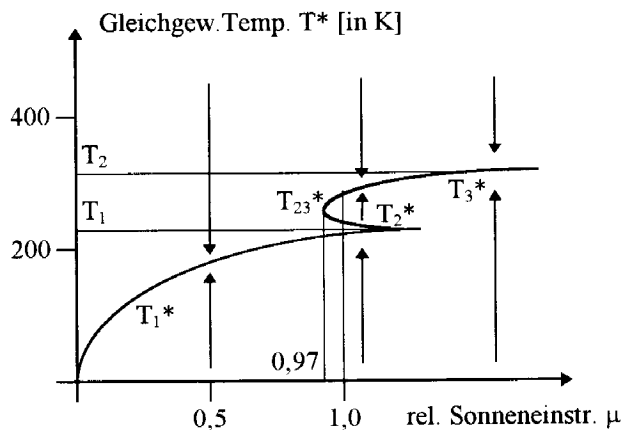


Abbildung 5. Strukturelle Instabilität des Modells B bei unterschiedlicher Sonneneinstrahlung

Bisher haben wir uns ausschließlich für stationäre Klimazustände und deren Stabilitätsverhalten interessiert. Das dynamische Modellverhalten, d.h. die Bestimmung des zeitlichen Temperaturverlaufs außerhalb der Gleichgewichtslagen kann am einfachsten durch eine Computersimulation gefunden werden. Die Grundgleichung (4) und alle daraus abgeleiteten Modellgleichungen stellen gewöhnliche explizite Differentialgleichungen dar, welche beispielsweise mit Hilfe des Eulerschen Polygonzugverfahrens (oder eines verbesserten Verfahrens höherer Ordnung) numerisch gelöst werden können.

Die dazu benötigten Methoden sind z.B. in Karigl (1991, 1992) anhand von Aufgaben aus der Biomathematik eingehend erörtert. Das Ergebnis einer solchen Computersimulation ist in Abb. 6 dargestellt und zeigt den Temperaturverlauf nach Modell (B) für die relative Sonneneinstrahlung $\mu = 1,1$ und verschiedene Anfangswerte zwischen 0 und 500 K.

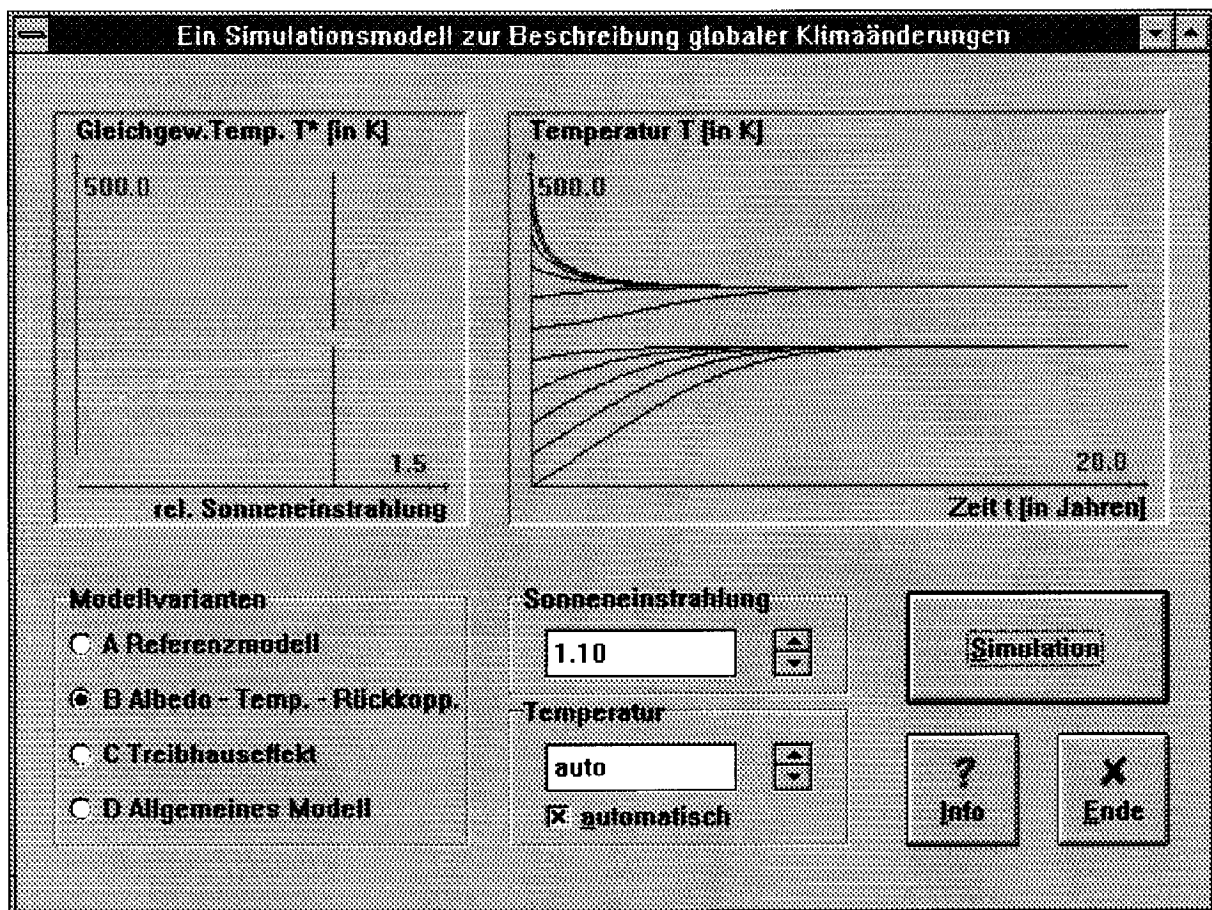


Abbildung 6. Computersimulation für das Modell B mit Albedo-Temperatur-Rückkoppelung

4. Treibhauseffekt

Ein nächster Schritt, unser Klimamodell besser an die realen Gegebenheiten auf der Erde anzupassen, besteht in einer Modifikation des Ansatzes für die Wärmeabstrahlung R_{aus} . Tatsächlich gibt die Erde nicht nur wie ein schwarzer (oder grauer) Körper Wärme in den Weltraum ab, vielmehr kommt es durch das Vorhandensein von atmosphärischen Gasen wie z.B. Wasserdampf oder Kohlendioxid zu einer Gegenstrahlung (Treibhauseffekt). Vor allem Wolken schwächen durch ihre Absorptionseigenschaft die Ausstrahlung der Erde deutlich ab, wobei dieser Effekt bei hohen Temperaturen durch einen höheren Wolkenbedeckungsgrad stärker ausfällt als bei niedrigen Temperaturen. Fraedrich (1979) trägt diesem Verhalten durch eine Verminderung der Emissionsfähigkeit ε in Abhängigkeit von der Erdoberflächentemperatur T Rechnung gemäß

$$(6) \quad \varepsilon(T) = 1 - (\varepsilon_{\text{CO}_2} + \varepsilon_{\text{H}_2\text{O}} T^2) = 0,87 - 3 \cdot 10^{-6} T^2,$$

wobei $\varepsilon_{\text{CO}_2}$ die Verminderung der Emissionsfähigkeit durch CO_2 , $\varepsilon_{\text{H}_2\text{O}}$ jene durch Wasserdampf beschreibt. Setzen wir für die Sonneneinstrahlung $R_{\text{ein}} = 340\mu(1 - \alpha)$ mit $\alpha = 28,4\%$ wie im Referenzmodell und für die Wärmeausstrahlung $R_{\text{aus}}(T) = 5,67 \cdot 10^{-8} \varepsilon(T) T^4$ mit $\varepsilon(T)$ gemäß (6), so erhalten wir

$$(Modell C) \quad c \cdot dT/dt = p + r T^4 + s T^6$$

mit $p = 243\mu$, $r = -4,9 \cdot 10^{-8}$ und $s = 1,7 \cdot 10^{-13}$.

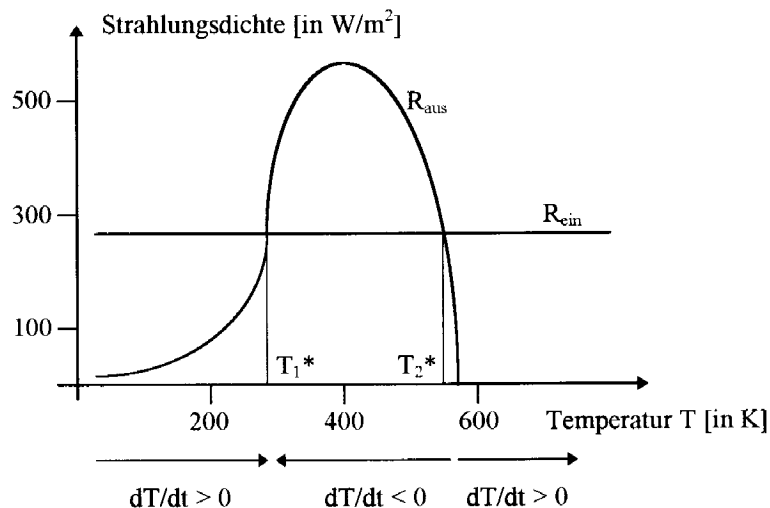


Abbildung 7. Stabilitätsverhalten des Modells C mit Treibhauseffekt

Entsprechend dem bisherigen Vorgehen werden zunächst die stationären Klimazustände bei normaler Sonneneinstrahlung (d.h. $\mu = 1$) sowie deren Stabilitätsverhalten ermittelt. Setzen wir in Gleichung (C) $dT/dt = 0$, so erhalten wir die einzigen beiden physikalisch relevanten Temperaturwerte $T_1^* = 289,1 \text{ K}$ (etwa $16 \text{ }^\circ\text{C}$) und $T_2^* = 518,1 \text{ K}$ (etwa $245 \text{ }^\circ\text{C}$). Eine Stabilitätsanalyse zeigt, daß die dem heutigen Zustand entsprechende Gleichgewichts-

temperatur T_1^* wieder asymptotisch stabil, T_2^* dagegen instabil ist (siehe Abb. 7). Für Temperaturen $T > T_2^*$ kommt es zu einem fortgesetzten Aufheizen der Erdatmosphäre - zumindest so lange, bis bei extrem hohen Temperaturen der Treibhauseffekt praktisch nicht mehr wirksam ist.

Die Abhängigkeit des Klimamodells (C) von der Sonneneinstrahlung illustriert die Temperatur-Gleichgewichtskurve $p(\mu) + rT^4 + sT^6 = 0$. Diese Kurve kann in der Form $\mu = \mu(T)$ explizit dargestellt werden und ist in Abb. 8 skizziert. Es zeigt sich, daß ein gemäßigtes stabiles Temperaturgleichgewicht T_1^* über weite Bereiche des Parameters μ existiert und theoretisch erst bei extrem hoher relativer Sonneneinstrahlung verloren geht. Die kritische Grenze, bei der sich das Stabilitätsverhalten des Klimasystems grundlegend ändert, kann wie in Modell (B) aus $d\mu/dT = 0$ ermittelt werden und liegt bei $T_{12}^* = 438,4 \text{ K}$ bzw. $\mu = 2,48$.

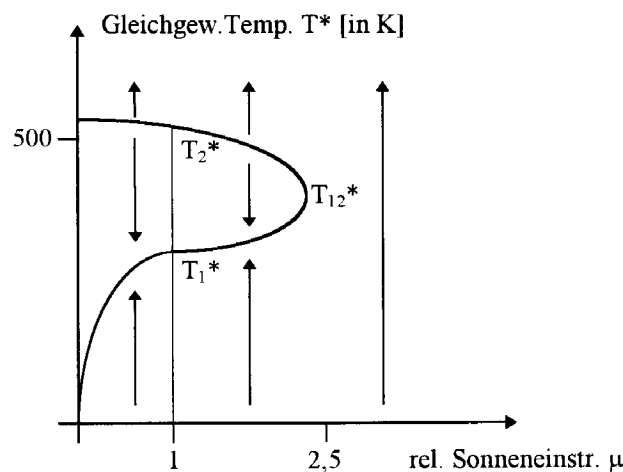


Abbildung 8. Strukturelle Instabilität des Modells C mit Treibhauseffekt

Eine Kombination der beiden in den Modellen (B) und (C) berücksichtigten Effekte führt auf ein allgemeines Modell, welches jedoch vollkommen analog zu dieser Darstellung behandelt werden kann. Dabei zeigt sich, daß das gemäßigte Temperaturgleichgewicht, das dem heutigen Zustand unserer Erde entspricht, nur lokale innere bzw. lokale strukturelle Stabilität besitzt. Größere Abweichungen der Erdoberflächentemperatur oder der Sonneneinstrahlung können zu einem Kippen des Systems in einen Zustand andauernder extremer Kälte oder extremer Hitze führen (vgl. Fraedrich (1979)).

Abschließend sei erwähnt, daß sämtliche der hier besprochenen Modelle zur Gruppe der sogenannten nulldimensionalen Klimamodelle zählen, bei denen die Klimatelemente, in erster Linie die Temperatur, nur Funktionen der Zeit sind und räumliche Abhängigkeiten nicht betrachtet werden. In eindimensionalen Modellen wird auch die Abhängigkeit von einer räumlichen Dimension, in der Regel von der geographischen Breite berücksichtigt, sodaß hier auch eine Erfassung des Wärmeaustausches zwischen dem Äquator und den Polen (meridionaler

Wärmefluß) möglich wird. Bei zweidimensionalen Modellen wird zusätzlich der Einfluß der Höhe innerhalb der Atmosphäre auf die Klimaelemente miteinbezogen. Die Behandlung höherdimensionaler Klimamodelle erfordert jedoch in Bezug auf analytische Methoden sowie bei der Computersimulation einen Aufwand, der über den vorgegebenen Rahmen dieser Darstellung hinausgeht.

Literatur

- Bayer D. (1991): Einfache mathematische Modelle zur Beschreibung globaler Klimaänderungen. Verlag Dr. Kovac, Hamburg.
- Budyko M.I. (1969): The effect of solar radiation variations on the climate of the earth. *Tellus* 21, 611 - 619.
- Fraedrich K. (1978): Structural and stochastic analysis of a zero-dimensional climate system. *Quart. J. R. Met. Soc.* 104, 461 - 474.
- Fraedrich K. (1979): Catastrophes and resilience of a zero-dimensional climate system with ice-albedo and greenhouse feedback. *Quart. J. R. Met. Soc.* 105, 147 - 167.
- Griffel D.H. and Drazin P.G. (1981): On diffusive climatological models. *J. Atmos. Sci.* 38, 2327 - 2332.
- Karigl G. (1991): Modellbildung und Simulation ökologischer Systeme im Unterricht. *Didaktik-Reihe der ÖMG*, Heft 19, 108 - 128.
- Karigl G. (1992): Umweltprojekte im Mathematikunterricht. *Didaktik-Reihe der ÖMG*, Heft 20, 13 - 26.
- Sellers W.D. (1969): A global climatic model based on the energy balance of the earth-atmosphere system. *J. Appl. Meteor.* 8, 392 - 400.

Anschrift des Verfassers:

Univ.Doz. Dr. Günther Karigl
Abteilung für Mathematik in den Naturwissenschaften und Mathematische Biologie
Technische Universität Wien
A-1040 Wien, Wiedner Hauptstraße 8-10/118
Email: G.Karigl@tuwien.ac.at